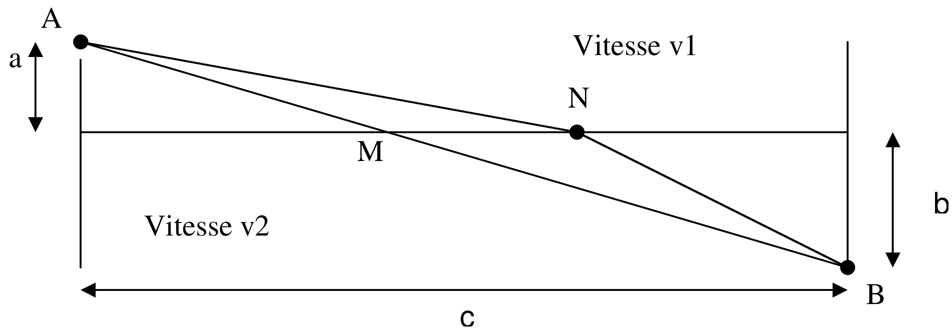
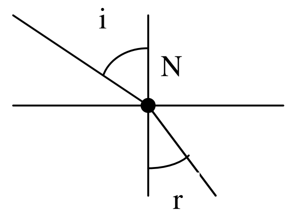
Problème : trouver la position du point N telle que le temps mis pour aller de A à B soit minimum





Soit T le temps mis pour aller de A à B :

$T = \frac{AN}{v1} + \frac{NB}{v2}$ (1) prenons pour hypothèse que v1>v2

T peut encore s'exprimer : $T = \frac{a}{v1\cos(i)} + \frac{b}{v2\cos(r)}$ (2)

Connaissant a, b, c les angles i et r sont liés par la relation : $a\tan(i) + b\tan(r) = c$ (3)

(2) et (3) par différenciation conduisent à :

$dT = \frac{a\sin(i)d(i)}{v1\cos^2(i)} + \frac{b\sin(r)d(r)}{v2\cos^2(r)}$ et $\frac{ad(i)}{\cos^2(i)} + \frac{bd(r)}{\cos^2(r)} = 0$

T est minimum lorsque dT=0 ce qui donne: $\frac{\sin(i)}{v1} = \frac{\sin(r)}{v2}$ (4)

Le problème revient à résoudre le système d'équations (3) et (4)

Posons $\tau = \frac{v2}{v1} < 1$ le système à résoudre devient : $\begin{cases} \sin(r) = \tau\sin(i) \\ \frac{a\tan(i)}{c} + \frac{b\tan(r)}{c} = 1 \end{cases}$ (5)

En posant $\cos^2(\theta) = \frac{a\tan(i)}{c}$ et $\sin^2(\theta) = \frac{b\tan(r)}{c}$

Le système (5) conduit à : $\tau^2\tan^4(\theta) = \frac{a^2 + c^2\sin^4(\theta)}{b^2 + c^2\cos^4(\theta)}$

D'où en posant $t = \tan^2(\theta) + \frac{1}{2}$ on obtient une équation de degré 4 réduite :

$$t^4 + t^2\left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{1}{2} - \frac{a^2+c^2}{\tau^2 b^2}\right) + t\left(\frac{1}{8} - \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2-c^2}{\tau^2 b^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2+c^2}{\tau^2 b^2}\right) = 0$$

(Voir la méthode de résolution des équations de degré 3 et 4 par ailleurs)